Analyse Complexe
TD 9
Fonction ζ de Riemann

Exercice 1 Que vaut la somme

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots ?$$

Exercice 2 Montrer que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

où μ est la fonction de Möbius qui vaut 1 si $n = 1$, $(-1)^k$ si n est le produit de k nombres premiers distincts et 0 sinon. En déduire que $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$ si $n = 1$ et 0 sinon.

En déduire également qu'un zéro éventuel de ζ sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ est forcément simple.

Bien sûr, on a vu en cours que ζ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$, donc la dernière question de l'exercice est vide. Néanmoins l'argument qui y mène est nettement plus simple que celui qui prouve la non-annulation.

Exercice 3

1. (*) On se donne $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels, $q > 0$ entier et $M > 0$. Montrer que l'on peut trouver $t \in [M, Mq^n]$ et des entiers $m_1, \dots, m_n$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$|ta_k - m_k| \leq \frac{1}{q}.$$
2. Soit $\sigma > 1$. Montrer que pour tout réel t
$$|\zeta(\sigma + it)| \leq \zeta(\sigma)$$
et que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des t arbitrairement grands tels que
$$|\zeta(\sigma + it)| \geq (1 - \epsilon)\zeta(\sigma).$$
3. En déduire que pour tout $R > 0$, la fonction ζ n'est pas bornée sur l'ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Im}(s) > R$.

Exercice 4

1. On se donne $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et $M > 0$. Montrer que si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,
$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_M^T \left(\prod_{k=1}^{n} f_k(a_k t) \right) dt = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k(t) dt \right).$$
On pourra commencer par traiter le cas des polynômes trigonométriques.
2. On conserve les notations précédentes et on se donne de plus $b_1, \dots, b_n$ des réels, et $\epsilon > 0$. Montrer l'existence d'un réel $t > M$ et de n entiers $m_1, \dots, m_n$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$,
$$|ta_k - b_k - 2\pi m_k| < \epsilon.$$
On va appliquer ce résultat à l'étude de $1/\zeta$.

3. Montrer que la fonction $s \mapsto \mathrm{Re}\left(\log(\zeta(s)) - \sum_p p^{-s}\right)$ est bornée sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.
4. (*) On fixe $n \geq 1$ et $M > 0$. Montrer que l'on peut trouver $t > M$, tel que pour tout $\sigma > 1$, l'on ait, si $s = \sigma + it$,
$$\mathrm{Re}\left(\sum_p p^{-s}\right) \leq -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^{-\sigma} + \sum_{k>n} p_k^{-\sigma}.$$
5. En déduire que quelque soit $M > 0$, $1/\zeta$ n'est pas bornée sur l'ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Im}(s) > M$.

Exercice 5 A l'aide du théorème des nombres premiers, montrer que :

— si p_n désigne le n-ème nombre premier, $p_n \sim n \log n$ quand $n \to +\infty$;
— l'ensemble des rationnels de la forme p/q avec p et q premiers, est dense dans $\mathbb{R}^+$;
— pour toute chaîne finie d'entiers $a_1 \dots a_n$, avec $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ pour tout i et $a_1 \neq 0$, il existe un nombre premier dont le développement décimal commence par $a_1 \dots a_n$.

Exercice 6 Pour tout $T > 0$, on note $N(T)$ le nombre de zéros de ζ dans la bande $0 < \mathrm{Im}(s) \leq T$.

1. (*) Montrer que
$$\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \sum_{\rho, \xi(\rho)=0} \int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{ds}{s-\rho}$$
et en déduire que
$$(N(T+1) - N(T))\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds\right).$$
2. On rappelle l'équivalent (Stirling) valable pour s dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ [1] :
$$\log\Gamma(s) = s\log(s) - s + O(\log(|s|)).$$
A l'aide de cet équivalent, prouver que
$$N(T+1) - N(T) = O(\log(T)).$$
3. (*) Redémontrer le résultat de la question précédente, en prouvant que $N(T+1) - N(T) \leq n(\sqrt{5})$, $n(r)$ désignant le nombre de zéros dans le cercle de centre $2 + iT$ de rayon r, puis en utilisant la formule de Jensen. On utiisera librement le fait, vu dans l'exercice 4 du TD 8, question 2, que $\zeta(s) = O(|s|)$ pour $s \geq 1/2$.
En fait, on sait montrer (et Riemann savait déjà...) que
$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$
4. Que peut-on dire asymptotiquement de la multiplicité d'un zéro de la fonction ζ dans le rectangle considéré ?

Exercice 7

1. Soit f une fonction continue à valeurs réelles sur l'intervalle $[0, R]$. Montrer que pour tout entier n, le nombre de changements de signe de f sur l'intervalle $[0, R]$ est supérieur ou égal au nombre de changements de signe de la suite $(f_i(R))_{0 \leq i \leq n}$, avec $f_0 = f$ et $f_i(x) = \int_0^x f_{i-1}(t)dt$ pour $i > 0$.
2. En déduire que le nombre de changements de signe de f est supérieur ou égal au nombre de changements de signe de la suite $f(0), \int_0^R f(t)dt, \dots, \int_0^R f(t)t^n dt$, pour tout entier n.

   Posons $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$. On *admettra* que $\Xi(t) \in \mathbb{R}$ si $t \in \mathbb{R}$, ainsi que la formule
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + 1/4}\cosh(\alpha t)dt = 2\cos(\alpha/2) - 2e^{i\alpha/2}(\frac{1}{2} + \psi(e^{2i\alpha})).$$
3. (*) En déduire
$$\lim_{\alpha \to \pi/4^-} \int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + 1/4} t^{2n}\cosh(\alpha t)dt = \frac{(-1)^n \pi\cos(\pi/8)}{2^{2n}},$$
pour tout $n \geq 0$.
4. Conclure que la fonction ζ a une infinité de zéros sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ (théorème de Hardy).

1. Prouvez-le pour $s = n$ entier !